**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

*№4* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2014*

**УДК 517.977.52**

# ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТИПА РОССЕРА

**А.Я.ДЖАББАРОВА*,**, К.Б.МАНСИМОВ*,****

***Бакинский Государственный Университет****

***Институт Систем Управления НАНА*****

***mansimov@front.ru***

*В статье изучается задача оптимального управления процессами, описываемые дискретно-непрерывными системами типа Россера. При предположении выпуклости области управления получено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума. Изучен случай квазиособых управлений.*

**Ключевые слова:** дискретно-непрерывная система типа Россера, специальное приращение функционала, аналог уравнения в вариациях, необходимое условие оптимальности второго порядка, квазиособое управление, линеаризованный принцип максимума.

Дискретно-непрерывная система уравнений типа Россера была введена в рассмотрение в работах [1, 2] и др. Т.Качзореком. Заметим, что дискретно-непрерывные задачи оптимального управления типа Россера имеют большое прикладное значение (см. напр. [1-3]).

В предлагаемой работе изучается одна задача оптимального управления дискретно-непрерывными системами типа Россера. Выводятся необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в случае выпуклости области управления.

**Постановка задачи.** Пусть управляемый процесс описывается следующей системой нелинейных уравнений, представляющий собой «смесь» дифференциальных и разностных уравнений

$$z_t(t,x) = f(t,x,z(t,x),y(t,x)),\ \ t \in T = [t_0,t_1],\ \ x = x_0,\ x_0+1,\dots,\ x_1, \quad (2.1)$$
$$y(t,x+1) = g(t,x,z(t,x),y(t,x)),\ \ t \in T,\ \ x = x_0,\ x_0+1,\dots,\ x_1-1,$$

с краевыми условиями

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,\ x_0+1,...,\ x_1, \tag{2.2}$$
$$y(t,x_0)=b(t),\quad t\in T=[t_0,t_1].$$

Здесь $f(t,x,z,y)$, $(g(t,x,z,y))$ – заданная $n$ $(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z,y)$ до второго порядка включительно, $b(t)$ – заданная $m$-мерная непрерывная вектор-функция, $a(x)$ – $n$-мерная дискретная вектор-функция являющаяся решением задачи

$$a(x+1)=F(x,a(x),u(x)),\qquad x\in X=\{x_0,\ x_0+1,...,\ x_1-1\},$$
$$a(x_0)=a_0, \tag{2.3}$$

где $F(x,a,u)$ – заданная $n$-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $(a,u)$ до второго порядка включительно, $a_0$ – задан, а $u(x)$ – $r$-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества $U$, т.е.

$$u(x)\in U\subset R^r,\quad x\in X. \tag{2.4}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\varphi_1(x,z(t_1,x))+\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t,y(t,x_1))dt, \tag{2.5}$$

определенного на решениях системы (2.1)-(2.3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x,z)$ $(\varphi_2(t,y))$ – заданная скалярная функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $z$ $(y)$ до второго порядка включительно.

Допустимое управление $u(x)$, доставляющий минимум функционалу (2.5), при ограничениях (2.1)-(2.4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(x),z(t,x),y(t,x),a(x))$ – оптимальным процессом.

**Вычисления специального приращения функционала качества и аналог линеаризованного условия максимума.** Пусть $(u(x),z(t,x),y(t,x),a(x))$ фиксированный допустимый процесс. В силу выпуклости области управления $U$ специальное приращение допустимого управления $u(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(x)=\varepsilon(v(x)-u(x)),\quad x=x_0,\ x_0+1,...,\ x_1-1. \tag{3.1}$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v(x)\in U$, $x=x_0,\ x_0+1,...,\ x_1-1$ произвольная $r$-мерная вектор-функция.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t,x), \Delta y_\varepsilon(t,x), \Delta a_\varepsilon(x))$ обозначим, специальное приращение состояния $(z(t,x), y(t,x), a(x))$ и введем следующие обозначения:

$$f_z(t,x) \equiv f_z(t,x,z(t,x), y(t,x)),$$
$$f_y(t,x) \equiv f_y(t,x,z(t,x), y(t,x)),$$
$$g_z(t,x) \equiv g_z(t,x,z(t,x), y(t,x)),$$
$$g_y(t,x) \equiv g_y(t,x,z(t,x), y(t,x)),$$
$$F_a(x) \equiv F_a(x,a(x), u(x)),$$
$$F_u(x) \equiv F_u(x,a(x), u(x)).$$

Имеет место

**Лемма 3.1.** Для специального приращения $(\Delta z_\varepsilon(t,x), \Delta y_\varepsilon(t,x), \Delta a_\varepsilon(x))$ вектора состояния $(z(t,x), y(t,x), a(x))$ справедливы следующие разложения

$$\begin{cases} \Delta z_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\, \ell(t,x) + o(\varepsilon;\, t,x), \\ \Delta y_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\, m(t,x) + o(\varepsilon;\, t,x), \\ \Delta a_\varepsilon(x) = \varepsilon\, \alpha(x) + o(\varepsilon;\, x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь $(\ell(t,x), m(t,x), \alpha(x))$ – допустимая вариация вектора состояния, являющаяся решением системы уравнений (аналог уравнения в вариациях)

$$\ell_t(t,x) = f_z(t,x)\ell(t,x) + f_y(t,x)m(t,x), \tag{3.3}$$
$$m(t,x+1) = g_z(t,x)\ell(t,x) + g_y(t,x)m(t,x),$$
$$\ell(t_0,x) = \alpha(x), \quad x = x_0,\, x_0+1, \ldots, x_1, \;\; m(t,x_0) = 0,\;\; t \in T,$$
$$\alpha(t+1) = F_u(x)\alpha(x) + F_u(x)(v(x) - u(x)), \tag{3.4}$$
$$\alpha(x_0) = 0.$$

Систему (3.3)-(3.4) назовем аналогом уравнения в вариациях в случае выпуклости области управления $U$.

Учитывая (3.2) вычислим специальное приращение функционала качества, используя формулу Тейлора:

$$S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\varphi_1(x, z(t_1,x) + \Delta z_\varepsilon(t_1,x)) - \varphi_1(x, z(t_1,x))] +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\varphi_2(t, y(t,x_1) + \Delta y_\varepsilon(t,x_1)) - \varphi_2(t, y(t,x_1))]dt = \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1'(x, z(t_1,x))}{\partial z} \ell(t_1,x) +$$
$$+ \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_2'(t, y(t,x_1))}{\partial y} m(t,x_1)dt + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1,x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1,x))}{\partial z^2} \ell(t_1,x) + \right.$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)dt\Bigg]+o(\varepsilon^2). \qquad (3.5)$$

Пусть $p_1(t,x)$, $p_2(t,x)$, $\psi(x)$ пока неизвестные вектор функции соответствующих размерностей. В дальнейшем, особо не отмечая, будем использовать следующего типа обозначения:

$$H(t,x,z,y,p_1,p_2)=p'f(t,x,z,y)+p'g(t,x,z,y),$$

$$M(x,a,u,\psi)=\psi'F(x,a,u), \qquad M_a(x)=M_a(x,a(x),u(x),\psi(x)),$$

$$M_{aa}(x)=M_{aa}(x,a(x),u(x),\psi(x)), \quad M_{ua}(x)=M_{ua}(x,a(x),u(x),\psi(x)),$$

$$H_z(t,x)=H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)),$$

$$H_y(t,x)=H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)),$$

$$H_{zz}(t,x)=H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)),$$

$$H_{zy}(t,x)=H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)),$$

$$H_{yz}(t,x)=H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)),$$

$$H_{yy}(t,x)=H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p_1(t,x),p_2(t,x)).$$

С учетом (3.3)-(3.4), и введенных обозначений, разложение (3.5) представляется в виде

$$S(u+\Delta u_\varepsilon)-S(u)=\varepsilon\left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_1'(x,z(t_1,x))}{\partial z}\ell(t_1,x)+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}m(t,x_1)dt\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+\int_{t_0}^{t_1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)dt\right\}+$$

$$+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t_1,x)\ell(t_1,x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x-1}p'(t_0,x)\ell(t_0,x)- \qquad (3.6)$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p'(t,x)\ell(t,x)dt-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[H_z(t,x)\ell(t,x)+H_y(t,x)m(t,x)\right]dt-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell(t,x)+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x)m(t,x)+m'(t,x)H_{yz}(t,x)\ell(t,x)+\right.$$

$$\left.+m'(t,x)H_{yy}(t,x)m(t,x)\right]dt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}q'(t,x_1-1)m(t,x_1)dt-$$

$$-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}q'(t,x_0-1)m(t,x_0)dt+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}q'(t,x-1)m(t,x)dt+$$

$$+\varepsilon\psi'(x_1-1)\alpha(x_1)-\varepsilon\psi'(x_0-1)\alpha(x_0)+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'(x-1)\alpha(x)-$$

$$-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M'_a(x)\alpha(x)-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M'_v(x)(v(x)-u(x))-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x)M_{aa}(x)\alpha(x)+$$

$$+2(v(x)-u(x))'M_{va}(x)\alpha(x)+(v(x)-u(x))'M_{vv}(x)(v(x)-u(x))\Big]+o(\varepsilon^2).$$

Если предполагать, что $(p(t,x),q(t,x),\psi(x))$ является решением системы уравнений

$$p_t(t,x)=-\frac{\partial H(t,x)}{\partial z}, \tag{3.7}$$

$$q(t,x-1)=\frac{\partial H(t,x)}{\partial y},$$

$$p(t_1,x)=-\frac{\partial\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z}, \tag{3.8}$$

$$q(t,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y},$$

$$\psi(x-1)=\frac{\partial M(x)}{\partial a}+p(t_0,x), \tag{3.9}$$

$$\psi(x_1-1)=0, \tag{3.10}$$

то разложение (3.6) примет вид

$$\begin{gathered}
S(u+\Delta u_\varepsilon)-S(u)=-\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}M'_v(x)(v(x)-u(x))+\\
+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+\int_{t_0}^{t_1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)dt-\right.\\
\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\big[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell(t,x)+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x)m(t,x)+m'(t,x)H_{yz}(t,x)\ell(t,x)+\\
+m'(t,x)H_{yy}(t,x)m(t,x)\big]dt-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha(x)M_{aa}(x)\alpha(x)+2(v(x)-u(x))'\times\\
\left.\times M_{va}(x)\alpha(x)+(v(x)-u(x))'M_{vv}(x)(v(x)-u(x))\Big]\right\}+o(\varepsilon^2).
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Отсюда в силу выпуклости области управления получаем, что, если процесс $(v(x),z(t,x),y(t,x),a(x))$ оптимален, то вдоль него для всех $v(x)\in U$, $x\in X$ выполняется соотношение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_u'(x)(v(x)-u(x)) \le 0\,. \tag{3.12}$$

**Теорема 3.1.** Для оптимальности допустимого управления $u(x)$ необходимо, чтобы соотношение (3.11) выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Соотношение (3.12) есть аналог линеаризованного условия максимума в рассматриваемой задаче.

Линеаризованное условие оптимальности (3.11) является необходимым условием оптимальности первого порядка. Но это условие оптимальности часто вырождается.

**Определение 3.1.** Если для всех $v(x)\in U$, $x\in X$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_u'(x)(v(x)-u(x)) = 0\,, \tag{3.13}$$

то допустимое управление $u(x)$ назовем квазиособым управлением.

Из разложения (3.11) следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+\int_{t_0}^{t_1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)dt-\\
&-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\big[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell(t,x)+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x)m(t,x)+\\
&+m'(t,x)H_{yz}(t,x)\ell(t,x)\big]dt-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x)M_{aa}(x)\alpha(x)+2(v(x)-u(x))'\times\\
&\times M_{va}(x)\alpha(x)+(v(x)-u(x))'M_{vv}(x)(v(x)-u(x))\Big]\ge 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (3.14) является неявным необходимым условием оптимальности второго порядка для квазиособых управлений.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности второго порядка для квазиособых управлений.

**Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.** Используя результаты работ [9-11] запишем представление решения задач (3.3), (3.4).

Пусть $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i,j=1,2$ матричные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\,\tau,s)}{\partial\tau}=-V_{11}(t,x;\,\tau,s)\,f_z(\tau,s)-V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z(\tau,s),$$

$$V_{11}(t,x;\tau,s-1)=V_{11}(t,x;\tau,s)f_y(\tau,s)+V_{12}(t,x;\tau,s)g_y(\tau,s),$$
$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial s}=-V_{21}(t,x;\tau,s)f_z(\tau,s)-V_{22}(t,x;\tau,s)g_z(\tau,s),$$
$$V_{22}(t,x;\tau,s-1)=V_{21}(t,x;\tau,s)f_y(\tau,s)+V_{22}(t,x;\tau,s)g_y(\tau,s),$$
$$V_{11}(t,x;t,s)=0,\qquad x_0\le s\le x-2,$$
$$V_{11}(t,x;t,x-1)=E_1,$$
$$V_{12}(t,x;\tau,x-1)=0,\qquad \tau\in[t_0,t],$$
$$V_{21}(t,x;t,s)=0,\qquad x_0\le s\le x-1,$$
$$V_{22}(t,x;\tau,x-1)=E_2,$$
($E_1$, $E_2$ – единичные матрицы соответствующих размерностей).

Тогда как показано в [9] имеет место представление

$$\ell(t,x)=V_{11}(t,x+1;t_0,x)\alpha(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;t_0,s)\alpha(s), \tag{4.1}$$

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\frac{\partial V_{11}(t,x+1;t_0,s)}{\partial t}\alpha(s). \tag{4.2}$$

Далее через $\Phi(x,s)$ обозначим решение задачи

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a(s),$$
$$\Phi(x,x-1)=E_1.$$

Тогда решение задачи (3.4) допускает (см. напр. [10, 11]) представление

$$\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)F_a(s)(v(s)-u(s)). \tag{4.3}$$

Займемся преобразованием представлений (4.1), (4.2) с учетом (4.3). Имеем [9]:

$$\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;t_0,x)\Phi(x,s)F_a(s)(v(s)-u(s))+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{s-1}V_{11}(t,x+1;t_0,s)\Phi(s,\tau)F_a(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right]=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}(t,x+1;t_0,x)\times$$
$$\times\Phi(x,s)F_a(s)(v(s)-u(s))+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;t_0,\tau)\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)(v(s)-u(s))=$$
$$=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[V_{11}(t,x+1;t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;t_0,\tau)\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)(v(s)-u(s)).$$

Полагая

$$L_1(t,x,s)=V_{11}(t,x+1;\,t_0,x)\Phi(x,s)+\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}(t,x+1;\,t_0,\tau)\Phi(\tau,s),$$

последнее представление записывается в виде

$$\ell(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_1(t,x,s)\,F_a(s)(v(s)-u(s)). \tag{4.4}$$

Далее

$$\begin{aligned} m(t,x)&=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=x_0}^{s-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,s)}{\partial t}\Phi(s,\tau)F_a(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right]= \\ &=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s)\right]F_a(s)(v(s)-u(s)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Положим

$$L_2(t,x,s)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}\frac{\partial V_{21}(t,x;\,t_0,\tau)}{\partial t}\Phi(\tau,s).$$

Тогда представление (4.5) принимает вид

$$m(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}L_2(t,x,s)\,F_a(s)(v(s)-u(s)). \tag{4.6}$$

Используя представления (4.3), (4.4), (4.6), по схеме, например, работ [6-8, 11], доказывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned} &\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x-1}L_1(t_1,x,\tau)\,F_a(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)'\times \\ &\times\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x-1}L_1(t_1,x,s)\,F_a(s)(v(s)-u(s))\right)=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,F_a'(\tau)\times \\ &\times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)\right\}F_a(s)(v(s)-u(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}L_2(t,x_1,\tau)\,F_a(\tau)(v(\tau)-u(\tau))\right)'\times \\ &\times\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}\left(\sum_{s=x_0}^{x_1-1}L_2(t,x_1,s)\,F_a(s)(v(s)-u(s))\right)dt=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\times \\ &\times F_v'(\tau)\left[\int_{t_0}^{t_1}L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)dt\right]F_v(s)(v(s)-u(s)), \end{aligned}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\int_{t_0}^{t_1}\left[\ell'(t,x)H_{zz}(t,x)\ell(t,x)+\ell'(t,x)H_{zy}(t,x)m(t,x)+m(t,x)H_{yz}(t,x)\ell(t,x)+\right.$$

$$\left.+m'(t,x)H_{yy}(t,x)m(t,x)\right]dt=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'F_a'(\tau)\times$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\left[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}(t,x)L_2(t,x,s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}(t,x)L_2(t,x,s)\right]dt\right\}\times$$

$$\times F_a(s)(v(s)-u(s)),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(x)M_{yy}(x)\alpha(x)=$$

$$=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'F_a'(\tau)\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}(x)\Phi(x,s)\right\}F_a(s)(v(s)-u(s)),$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(v(x)-u(x))'M_{va}(x)\alpha(x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(s)-u(s))'M_{vy}'(s)\Phi(s,x)\right]F_v(x)(v(x)-u(x)).$$

Введем матричную функцию $K(\tau,s)$ посредством формулы

$$K(\tau,s)=-\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}L_1'(t_1,x,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}L_1(t_1,x,s)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}L_2'(t,x_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}L_2(t,x_1,s)\,dt+ \tag{4.7}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\left[L_1'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_1'(t,x,\tau)H_{zy}(t,x)L_2(t,x,s)+\right.$$

$$\left.+L_2'(t,x,\tau)H_{yz}(t,x)L_1(t,x,s)+L_2'(t,x,\tau)H_{yy}(t,x)L_2(t,x,s)\right]dt+$$

$$+\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,\tau)M_{aa}(x)\Phi(x,s).$$

Принимая во внимание вышеприведенные тождества и учитывая обозначение (4.7), неравенство (3.10) преобразуется к виду

$$\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'F_u'(\tau)K(\tau,s)\,F_u(s)(v(s)-u(s))+$$

$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}(v(s)-u(s))' M_{ua}(s)\Phi(s,x)\right]\times$$
$$\times F_u(x)(v(x)-u(x))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(v(x)-u(x))' M_{uu}(x)(v(x)-u(x))\leq 0. \qquad (4.8)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 4.1.** Для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (4.8) выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$ .

Приведем более легко проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка для квазиособых управлений.

**Теорема 4.2.** Для оптимальности квазиособого управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$(w-u(\xi))'\,[F_v'(\xi)K(\xi,\xi)\,F_v(\xi)+M_{vv}(\xi)](w-u(\xi))\leq 0\,,$$

выполнялось для всех $w\in U$ и $\xi\in X$ .

## ЛИТЕРАТУРА


1. Kaczorek T. Positive 2D Hybrid Linear Systems // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical sciences. 2007, v. 55, No4, pp. 351-358.
2. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski L. Sovlability of 2D hybrid linear systems - comparison of three different methods // Actfa mechanica et automatica. 2008, v. 2, No2, pp. 59-66.
3. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M., Pyzhkova O.N. Hybrid Control Discrete-Continuous 2-D Systems // Technical University of Bialyostok. 2010, pp. 3-8.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 400 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
6. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм. 2013, 353 с.
7. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 353 с.
8. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 174 с.
9. Джаббарова А.Я., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. О представлении решений одной дискретно-непрерывной линейной системы типа Россера // Докл. НАН Азербайджана. 2013, № 8, с. 15-18.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: Белгосуниверситет, 1973, 248 с.
11. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Изд-во БГУ, 152 с.

## ROSSER TİPLİ DİSKRET-KƏSİLMƏZ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ KVAZİMƏXSUSİ İDARƏLƏRİN TƏDQİQİ

**A.Y.CABBAROVA, K.B.MƏNSİMOV**

**XÜLASƏ**

İşdə diferensial və fərq tənliklər sisteminin küllüsü ilə təsvir olunan və başlanğıc şərtin köməyilə idarə olunan bir diskret-kəsilməz optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib (xəttiləşdirilmiş maksimum şərti) və ikinci tərtib (kvaziməxsusi halda) zəruri şərtlər alınmışdır.

**Açar sözlər:** Rosser tipli diskret-kəsilməz sistem, funksionalın xüsusi artımı, variasiyalı tənliyin analoqu, optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt, kvaziməxsusi idarə, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi.

## INVESTIGATION OF QUASISINGULAR CONTROLS ON ONE ROESSER TYPE CONTINUOUS -DISCRETE CONTROL PROBLEM

**A.Y.JABBAROVA, K.B.MANSIMOV**

**SUMMARY**

A continuous-discrete control problem described by a system of difference-differential equations and controlled by the initial condition is considered. First and second order necessary optimality conditions are obtained.

**Key words:** Roesser type discrete-continuous system, special variation functional, analogues, variation, equation, second order necessary optimality condition, quasisingular control, linearized maximum principle.

*Поступила в редакцию: 01.10.2014 г.*
*Подписано к печати: 13.02.2015 г.*